www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.S.E.N. - I.S.E.P.

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES Série P

Vendredi 19 mai 1989 de 8 h à 12 h

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.

Ce problème étudie la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Les six parties sont largement indépendantes les unes des autres.

I

On considère l'équation différentielle du second ordre

$$E(\alpha,\beta,\gamma) : \quad y'' + \alpha y' + (\beta x^2 + \gamma)\, y = 0$$

où α, β et γ sont trois nombres réels donnés, et y une fonction réelle de la variable réelle x.

1°) Résoudre $E(\alpha,0,\gamma)$ en discutant suivant les valeurs de α et γ.

2°) On note E_2 l'équation $E(0,-4,2)$. Montrer que E_2 admet comme solutions des fonctions paires développables en séries entières de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}\, x^{2n}$.

Trouver une relation de récurrence sur les coefficients ; déterminer a_2, a_4, a_6, puis a_{2n} ; préciser le rayon de convergence, et exprimer à l'aide de fonctions usuelles la solution y_0 qui prend la valeur 1 pour $x = 0$.

3°) Résoudre l'équation différentielle $E_1 : y' + 2xy = 0$.

Montrer que toute solution de E_1 est aussi solution de E_2.

4°) Déterminer la solution générale de E_2 (on obtiendra une intégrale dont on ne cherchera pas à exprimer une primitive à l'aide de fonctions usuelles).

II

On se propose dans ce paragraphe de faire un calcul approché de certaines valeurs prises par la fonction Φ.

1°) a et b sont deux réels tels que $a < b$.

f et g sont deux fonctions C^1 de [a,b] dans $\mathbb{R}$, la fonction g' étant strictement positive sur]a,b[.

Montrer qu'il existe c dans]a,b[tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Indication : On pourra considérer la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x) - f(a) - K\,[g(x) - g(a)]$, où K est une constante convenable.

2°) On suppose f de classe C^2 sur [a,b], et h un réel compris entre 0 et b-a.

On pose : $\psi(h) = \int_a^{a+h} f(t)\,dt - \frac{h}{2}\,[f(a) + f(a+h)]$.

En appliquant II.1°), montrer qu'il existe α dans]0,h[tel que :

$$\frac{\psi(h)}{h^3} = -\frac{1}{12}\,f''(a+\alpha).$$

En déduire, en appelant K un majorant de $|f''(x)|$ sur [a,b], un majorant de $|\psi(h)|$.

3°) a) On divise l'intervalle [a,b] en n parties égales. Montrer qu'en calculant une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ par la méthode des trapèzes, l'erreur commise est au plus égale à $\frac{K(b-a)^3}{12\,n^2}$.

b) Application numérique : Calculer $\Phi(1)$, $\Phi(2)$ et $\Phi(3)$ à 10^{-3} près, en précisant dans chaque cas la valeur de n utilisée.

III

1°) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente.

2°) Montrer que l'intégrale $J = \int_3^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est inférieure à $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$.

En déduire une valeur approchée de I à 10^{-2} près.

3°) Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction Φ.

IV

On veut désormais trouver la valeur exacte de I. Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $J(R) = \iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$, où D(R) est la portion de disque de rayon R contenue dans le premier quadrant.

2°) Soit $\Gamma(R)$ le carré [0,R]x[0,R] du plan euclidien.

Exprimer $K(R) = \iint_{\Gamma(R)} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$ en fonction de Φ.

3°) Montrer que : $J(R) \leqslant K(R) \leqslant J(R\sqrt{2})$, et que K(R) admet une limite lorsque R tend vers l'infini. Conclure.

V

Pour n entier naturel, on définit les intégrales : $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$.

1°) Etablir une relation de récurrence entre ces intégrales. En déduire leur valeur.

2°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 < W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n}$,

et en déduire que $\dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

3°) On pose pour $n \geqslant 1$: $v_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}} \left(\dfrac{e}{n}\right)^n$ et $x_n = \ell n(v_n)$ (ℓn désignant la fonction logarithme népérien).
Montrer que la série de terme général : $u_n = x_{n+1} - x_n$ est convergente.
En déduire que la suite (v_n) est convergente, de limite un réel λ non nul.

4°) En utilisant le rapport $\dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}}$, déterminer la valeur de λ.
En déduire un équivalent de n! au voisinage de l'infini.

VI

1°) On considère la suite de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall n \geqslant 1, \quad f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

Etudier la convergence de cette suite. Montrer que la convergence est uniforme sur [0,A], pour tout réel A strictement positif. On pourra utiliser l'inégalité (à démontrer) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ell n\,(1 + x) \leqslant x.$$

2°) Soit l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$.
Montrer que cette intégrale est convergente.

3°) A l'aide d'un changement de variable convenable, exprimer I_n en fonction d'une intégrale W_p.

4°) En utilisant l'équivalent de n! établi en V, montrer que la suite (I_n) est convergente. Quelle est sa limite ? Commenter le résultat obtenu.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail